Osservazioni sulle permutazioni cicliche

1. Data la permutazione ciclica $\gamma = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_\ell)$, si ha, per ogni $i = 0, \ldots, \ell - 1$,

$$\gamma^i(a_1) = a_{i+1}$$

e inoltre

$$\gamma^\ell(a_1) = a_1.$$

Quindi si può scrivere

$$\gamma = \left(\gamma^0(a_1), \gamma^1(a_1), \ldots, \gamma^{i-1}(a_1), \ldots, \gamma^{\ell-1}(a_1)\right).$$

2. Dalla dimostrazione della Proposizione 18.10 emerge che, per ogni $a \in X$, se $\Omega_\sigma(a)$ ha lunghezza ℓ, allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$, detto r il resto della divisione euclidea di i per ℓ, si ha

$$\sigma^i(a) = \sigma^r(a).$$

3. Se γ è il ciclo (di lunghezza ℓ) associato all'orbita $\Omega_\sigma(a)$, allora, da un lato,

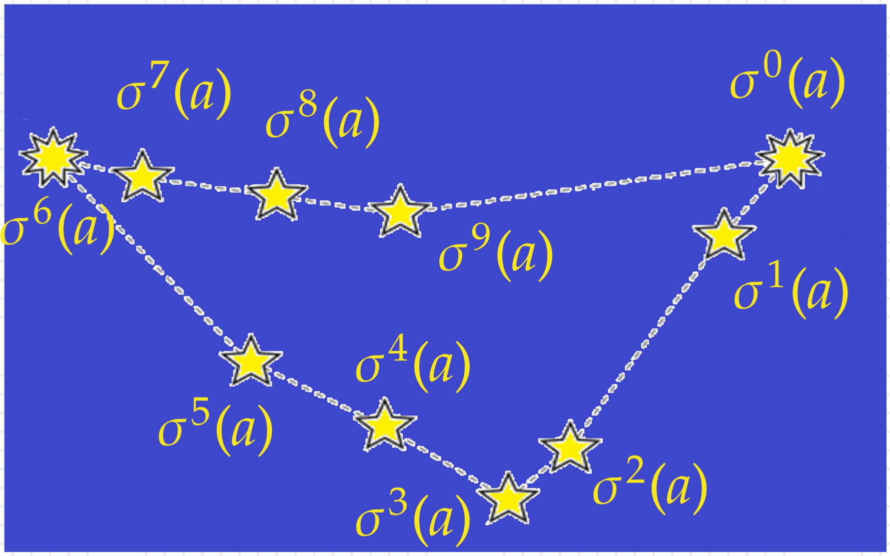
$$\gamma = \left(a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{i-1}(a), \ldots, \sigma^{\ell-1}(a)\right)$$

dall'altro

$$\gamma = \left(a, \gamma(a), \ldots, \gamma^{i-1}(a), \ldots, \gamma^{\ell-1}(a)\right) .$$

Quindi, anzitutto, $\ell = |\Omega_\sigma(a)| = |\Omega_\gamma(a)|$. In secondo luogo, per ogni $i = 0, \ldots, \ell - 1$, $\sigma^i(a) = \gamma^i(a)$. Dunque, alla luce di quanto osservato al punto 2., quest'ultima uguaglianza è vera per ogni $i \in \mathbb{Z}$. Ma allora $\Omega_\sigma(a) = \Omega_\gamma(a)$.

4. Sia $i \in \mathbb{Z}$. Sia r il resto della divisione euclidea di i per ℓ. Rispetto alle notazioni precedenti, si ha $\gamma^i(a) = \gamma^r(a)$, e quindi $\gamma^i(a) = a$ se e solo se $r = 0$, ossia se e solo se ℓ divide i. Per quanto osservato sopra, in questo ragionamento, a γ si può sostituire σ. Ciò fornisce una dimostrazione semplice del Lemma 18.25.



L'orbita di a sotto l'azione della permutazione σ ha lunghezza 10